Séries

Table des matières

1 Exercices concrets

Exercice 1. Dans chaque cas, indiquer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = (\ln n)^{-\ln n}$
2. $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$
3. $u_n = \ln\left(\dfrac{\ln^2(n+1)}{\ln n \cdot \ln(n+2)}\right)$ (et somme)
4. $u_n = \left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
5. $u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ (et somme)
6. $u_n = (n^{\alpha} \sin(n^{-\alpha}))^{n^2}$ $(\alpha > 0)$
7. $u_n = 1 - \tanh\sqrt{\ln n}$
8. $u_n = \left(\arccos \dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
9. $u_n = e^{\arctan \frac{n-1}{n+1}} - e^{\frac{\pi}{4}}$

Exercice 2. Soit a et b des réels strictement positifs, et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} \text{ pour } n \geq 0.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sinh x$, et la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 > 0$ et le fait que, pour chaque $n \geq 0$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n et de l'axe Ox. Étudier la convergence de la série $\sum x_n$.

Exercice 4. On pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - \sqrt[k]{3}\right) \text{ pour } n \geq 2.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
3. Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

Exercice 5. Pour $n \geq 1$, on note p_n le n-ème naturel non nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9. On fixe également α un réel strictement positif. Quelle est la nature de la série de terme général $\sum \frac{1}{p_n^{\alpha}}$?

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls strictement croissante. On note a_n le ppcm de $u_1, \dots, u_n$. Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.

Exercice 7. Dans chaque cas, indiquer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{1}{\ln n + (-1)^n n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sin n}$
3. $u_n = (-1)^n \left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} - \dfrac{1}{e} \right)$
4. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + an + b}\right)$ $(a, b \in \mathbb{R}_+)$
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ (et somme)
6. $u_n = \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$ (et somme)
7. $u_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\cdot 2 \cdots n \cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}$, où $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$
8. $u_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ (utiliser $v_n = \sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$)
9. $u_n = \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice 8.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + O\left(\frac{1}{(n+2)!}\right) \text{ quand } n \to +\infty.$$
3. On pose enfin
$$u_n = \sin(\pi e n!) \text{ pour } n \geq 0.$$
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 9. On pose $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.

1. Étudier la nature des séries $\sum f(n)$ et $\sum (-1)^n f(n)$.
2. Donner des développements limités de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n}$ à la précision $o(1)$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$.

Exercice 10. Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n^\alpha}$.

Exercice 11.

1. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{\sin \ln n}{n}$.
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\sin \ln n}{n}$.

Exercice 12. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que, pour $n \geq 0$,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n \ln n} + b_n,$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$ et où la série $\sum b_n$ est absolument convergente. Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 13. On pose
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \text{ pour } n \geq 1.$$
Donner un développement limité à plusieurs termes de s_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 14. On pose
$$u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k} \text{ pour } n \geq 2.$$
Donner un développement limité à deux termes de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 15. On pose
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} k^k \text{ pour } n \geq 1.$$
Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 16. Donner un équivalent quand $n \to +\infty$ de
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik^{1/3}}.$$

Exercice 17 (Fonction ζ de Riemann)**.** Pour $s \in \mathbb{C}$ convenable, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Montrer que $\zeta(s)$ existe si et seulement si $\operatorname{Re} s > 1$.

Exercice 18. On considère la suite définie par
$$u_0 > 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\ln u_n} \text{ pour } n \geq 0.$$
Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 19. On considère la suite définie par
$$u_0 \in]0,1[\text{ et } u_{n+1} = u_n - u_n^2 \text{ pour tout } n \geq 0.$$
Donner un développement limité à plusieurs termes de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 20. On considère la suite réelle définie par
$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n} \text{ pour } n \geq 0.$$
Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 21. On considère la suite réelle définie par
$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n \frac{1+u_n}{2+3u_n} \text{ pour } n \geq 0.$$

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 22. Soit $\alpha > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par
$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n} \text{ pour } n \geq 1.$$

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose $\alpha > 1$, et on pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Donner un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque $n \to +\infty$.
3. On suppose $\alpha \leq 1$. Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

2 Exercices théoriques

Exercice 23. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Est-il vrai que $a_n = o(n^{-1})$?
2. On suppose que $a_n = o(n^{-1})$. Est-il vrai que $\sum a_n$ converge ?
3. Montrer que si $(a_n)_{n\geq 0}$ décroît et $\sum a_n$ est convergente, alors $a_n = o(n^{-1})$.

Exercice 24. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n} \text{ pour } n \geq 0.$$

Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. Indication : traiter d'abord le problème continu correspondant.

Exercice 25. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs. On suppose que $\sum b_n$ diverge et que

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \to \ell \in \mathbb{R}.$$

Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 26. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel $\gamma < -1$ et un entier $N \geq 0$ tels que

$$n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) \leq \gamma \text{ pour } n \geq N.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 27. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante et positive, $a \in]0,1[$ et $C > 0$. On pose $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que

$$a_n \sim \frac{C}{n^\alpha} \Leftrightarrow S_n \sim C\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Exercice 28. Caractériser les suites positives $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout série à termes positifs convergente $\sum u_n$, la série $\sum \lambda_n u_n$ soit également convergente.

Exercice 29.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et telle que

   $$\int_0^x f(t)dt \to +\infty \text{ quand } x \to +\infty.$$

   Expliciter une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tendant vers 0 en $+\infty$, et telle que

   $$\int_0^x \alpha(t)f(t)dt \to +\infty \text{ quand } x \to +\infty.$$

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers 0 et telle que la série $\sum \alpha_n u_n$ diverge.
3. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(\beta_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ et telle que la série $\sum \beta_n u_n$ converge.
4. Montrer qu'il n'existe aucune série à termes positifs $\sum u_n$ qui soit une « frontière » entre la convergence et la divergence, au sens où :
   (i) toute série $\sum v_n$ à termes positifs telle que $v_n = o(u_n)$ est convergente,
   (ii) toute série $\sum v_n$ à termes positifs telle que $u_n = o(v_n)$ est divergente.

Exercice 30. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, telle que $u_n \to 0$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ pour } n \geq 0,$$

et on suppose que la suite de terme général $S_n - nu_n$ est bornée. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 31. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 1}$ telles que la série $\sum u_n^2$ soit convergente. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2\right)^{1/2}.$$

Si u est un élément de E, on pose, pour $n \geq 1$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k+n}.$$

1. Soit n et N des entiers naturels non nuls. Établir l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+n)\sqrt{k}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

2. Montrer que la suite $H = (H_n)_{n\geq 1}$ est élément de E, et que

$$\|H\|_2 \leq \pi \|u\|_2.$$

Exercice 32 (Quizz)**.** Pour chaque affirmation suivante, fournir une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple sinon. $\sum u_n$ désigne toujours une série réelle.

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum n^{-1}|u_n|$ aussi.
2. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum n^{-5/4}u_n$ aussi.
3. Si $\sum u_n^4$ est convergente, alors $\sum u_n^5$ aussi.
4. Si $\sum u_n^5$ est convergente, alors $\sum u_n^6$ aussi.
5. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum n^{-1/4}u_n$ aussi.
6. Si $u_n \geq 0$ pour $n \geq 0$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ aussi.
7. Si $u_n \to 0$ et si les sommes partielles de $\sum u_n$ sont bornées, alors $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 33. Soit $\sum a_n$ une série complexe telle que $\sum na_n$ converge. Que dire de la série $\sum a_n$?

Exercice 34. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $a \in [0, 1[$, alors

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{1+a}.$$

2. Montrer que si $a > 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \sim \frac{(-1)^n u_n}{1+a}.$$

Exercice 35 (Ulm 2018)**.** Soient $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$, et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge. Montrer que

$$a_n \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 36. Soit p et q des naturels non nuls. On réordonne la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geq 1}$ en une suite $(u_n)_{n\geq 1}$, en en écrivant p termes positifs, puis q termes négatifs, puis à nouveau p termes positifs, etc... Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $\sum u_n$.

Exercice 37.

1. Soit $z_1, \ldots, z_r$ des nombres complexes. On suppose que $\sum_{k=1}^{r} z_k^p \to 0$ quand $p \to +\infty$. Que dire de $z_1, \ldots, z_r$?
2. Soit $\sum u_n$ une série complexe absolument convergente et telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p = 0 \text{ pour tout } p \geq 1.$$

Que dire ?

Exercice 38. Soit $\delta > 0$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes non nuls tels que

$$|z_n - z_m| \geq \delta \text{ si } m \neq n.$$

1. Établir l'existence d'une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la suite $\left(|z_{\sigma(n)}|\right)_{n\geq 0}$ soit croissante.
2. On pose $\beta = \inf\left\{\lambda > 0 / \sum |z_n|^{-\lambda} < \infty\right\}$. Encadrer β.

Exercice 39 (Produits infinis de nombres complexes)**.** Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum a_k$ soit absolument convergente. On pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \text{ pour } n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Sa limite est notée

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k).$$

2. On suppose de plus que $a_k \neq -1$ pour $k \geq 1$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \neq 0.$$

Exercice 40. Soit $\sum u_n$ une série complexe absolument convergente. On pose

$$X = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n, (\varepsilon_n)_{n\geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right\}.$$

Montrer que X est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Exercice 41. On note ℓ^1 l'espace vectoriel des suites complexes u telles que la série $\sum u_n$ converge absolument, normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Une partie X de ℓ^1 est dite *équisommable* si

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N \geq 0 \text{ tel que } \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \leq \varepsilon \text{ pour tout } u \in X.$$

Montrer qu'une partie X de ℓ^1 est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équisommable.