Les paradoxes de Hausdorff-Banach-Tarski

Cours donné en MPSI 833 en juin 2011

Table des matières

Énoncé sous une forme un peu naïve, le paradoxe de Banach-Tarski exprime qu'on peut découper un petit pois en un nombre fini de morceaux, rassembler les morceaux différemment, comme dans un puzzle, et obtenir une boule aussi grosse que le soleil ! Ou encore que l'on peut découper une orange en un nombre fini de morceaux puis obtenir par réarrangement *deux* copies de l'orange initiale. Historiquement, ce paradoxe est à situer dans le contexte du développement de la théorie de la mesure par Henri Lebesgue (1875-1941), dans les premières années du vingtième siècle (1901), avec notamment la question de savoir si l'on peut attribuer à toute partie bornée X de $\mathbb{R}^3$ un élément de $\mathbb{R}_+$, appelé *volume* de X et noté $\mathrm{vol}(X)$, et vérifiant les conditions naturelles suivantes.

(i) Le volume est finiment additif : si $X_1, \ldots, X_n$ sont des parties bornées de $\mathbb{R}^3$ deux à deux disjointes, alors [1]

$$\mathrm{vol}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(X_i).$$

(ii) Le volume est invariant par les isométries : si $X \subset \mathbb{R}^3$ est bornée et g est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathrm{vol}(g(X)) = \mathrm{vol}(X)$.

(iii) Enfin, le volume de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$ est égal à $\frac{4}{3}\pi$.

Naturellement, la même question a un sens dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$ (il faut alors remplacer $\frac{4}{3}\pi$ par 2 ou π).

1. Le symbole $\sqcup$ désigne une union disjointe.

Les paradoxes qu'on va expliquer dans la suite ont été découverts par Felix Hausdorff (1868-1942) en 1914 puis, sous leurs formes les plus spectaculaires, par Stefan Banach (1892-1945) et Alfred Tarski (1901-1983) en 1924.

1 Quelques groupes

On introduit ici les groupes qui nous seront utiles dans la suite. Il s'agit d'abord du groupe $SO(3)$ des rotations vectorielles de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure euclidienne canonique). Si on identifie matrices et endomorphismes, $SO(3)$ est l'ensemble des matrices semblables à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

avec matrice de passage orthogonale. L'analogue bi-dimensionnel du groupe $SO(3)$ est le groupe $SO(2)$ des rotations planes. Ce groupe possède une propriété qui le distingue radicalement de $SO(3)$: il est abélien. Plus précisément, $SO(2)$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(pas besoin de matrice de passage). Un élément r de $SO(2)$ peut être représentée en complexes par $r(z) = e^{i\theta}z$. On en déduit un fait très simple, mais qui nous sera très utile : si θ est incommensurable à π (au sens où $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$) et si $z \neq 0$, alors les $r^n(z)$, $n \geq 0$ sont deux à deux distincts.

On utilisera aussi, plus ponctuellement, le groupe $\mathrm{Is}^+(3)$ des déplacements de $\mathbb{R}^3$. Ses éléments sont les applications *affines* de la forme $x \mapsto r(x) + c$, où $r \in SO(3)$ et $c \in \mathbb{R}^3$.

Pour commencer à bien comprendre à quel point $SO(3)$ est peu commutatif, fixons deux rotations r et r' distinctes de l'identité, d'axes respectifs D et D', et supposons qu'elles commutent. La droite $D = \ker(r - \mathrm{id})$ est alors stabilisée par r'. Si on fixe un vecteur directeur unitaire e de D, on a donc ou bien $r'(e) = e$, ou bien $r'(e) = -e$. Dans le premier cas, $D = D'$. Dans le second, D et D' sont orthogonaux : en effet, si e' est un vecteur directeur unitaire de D', alors

$$\langle e, e' \rangle = \langle r'(e), r'(e') \rangle = -\langle e, e' \rangle.$$

On a donc $r'(e) = -e$ et $r'(e') = e'$. Complétons (e, e') en une base orthonormale (e, e', e'') de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $r'(e'')$ est orthogonal à e et e', donc de la forme $\pm e''$. Pour des raisons de déterminant, $r'(e'') = -e''$, ce qui prouve que r' est un demi-tour. Par symétrie, il en est de même de r. Après réciproque, on peut conclure : *deux rotations de $\mathbb{R}^3$ commutent si et seulement si elles ont même axe, ou si elles sont des demi-tours d'axes orthogonaux.* C'est donc plutôt rare...

2 Découpages

Formalisons l'idée de découpage évoquée dans l'introduction. Deux parties X et Y de $\mathbb{R}^3$ seront dites *superposables* s'il existe $g \in \mathrm{Is}^+(3)$ telle que $g(X) = Y$. Elles seront dites *équidécomposables* si l'on peut partitionner X et Y en un même nombre *fini* de parties :

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \text{ et } Y = \bigsqcup_{i=1}^{n} Y_i,$$

de sorte que, pour chaque i, X_i et Y_i soient superposables. Ainsi, X et Y sont équidéomposables si elles sont « superposables par morceaux ». Dans ce cas, on écrira $X \sim Y$. On peut vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^3$.

Vérifions la transitivité. Supposons que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. On peut alors écrire

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{m} g_i Y_i,\ Y = \bigsqcup_{i=1}^{m} Y_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} Y_i' \text{ et } Z = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_i Y_i'.$$

où $g_i, h_i \in \mathrm{Is}^+(3)$. On a alors

$$Y = \bigsqcup_{i,j} (Y_i \cap Y_j'),$$

et

$$\bigsqcup_{i,j} g_i(Y_i \cap Y_j') = \bigsqcup_{i} g_i Y_i \cap \bigsqcup_{i} g_i Y = X \cap \underbrace{\bigsqcup_{i} g_i Y}_{\supset \bigsqcup_i g_i Y_i = X} = X.$$

De même,

$$\bigsqcup_{i,j} h_j(Y_i \cap Y_j') = Z,$$

d'où

$$Z = \bigsqcup_{i,j} k_{i,j} g_i (Y_i \cap Y_j'),$$

avec $k_{i,j} = h_j g_i^{-1}$. Cela prouve que $X \sim Z$.

Regardons quelques exemples en dimension 1. Les déplacements de $\mathbb{R}$ sont très simples : ce sont les translations $\tau_x : t \mapsto t + x$!

Exemple 1. Montrons que $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^*$. Pour cela, il suffit de noter que

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N} \sim (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \sqcup \tau_1(\mathbb{N}) = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N}^* = \mathbb{R}^*.$$

On montre de la même manière que $\mathbb{R}$ est équidécomposable à $\mathbb{R} \setminus X$, pour toute partie finie X.

Exemple 2. Montrons un peu mieux : que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$. Pour cela, fixons α un réel irrationnel, et posons

$$D = \bigcup_{n \geq 0} \tau_\alpha^n(\mathbb{Q}).$$

Comme α est irrationnel, cette union est en réalité disjointe, et on a

$$\tau_\alpha(D) = \bigcup_{n\geq 1} \tau_\alpha^n(\mathbb{Q}) = D \setminus \mathbb{Q}.$$

Dès lors,

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus D) \sqcup D \sim (\mathbb{R} \setminus D) \sqcup \tau_\alpha(D) = (\mathbb{R} \setminus D) \sqcup (D \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Dans ces deux exemples, on a utilisé l'idée (dite de « l'hôtel de Hilbert ») qui consiste à « décaler pour faire de la place ». On la verra réapparaître plus loin.

3 Paradoxes dans le groupe $SO(3)$

Considérons les deux éléments de $SO(3)$ définis par

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \psi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il s'agit des rotations d'axes orientés respectivement par $\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}$ et e_3, et d'angles respectifs π et $\frac{2\pi}{3}$. Ces deux rotations ne commutent pas (leurs axes font un angle de $\frac{\pi}{4}$), mais elles vérifient les relations non triviales $\phi^2 = \psi^3 = \mathrm{id}$ (d'où : $\phi = \phi^{-1}$ et $\psi^2 = \psi^{-1}$). On va dans un premier temps montrer que ces relations sont moralement les seules, puis fabriquer à partir de ϕ et ψ deux nouvelles rotations qui *ne vérifient aucune relation non triviale.* Commençons par un lemme technique.

Lemme 1. Soit p un entier ≥ 1, et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ des éléments de $\{-1, 1\}$. Alors

$$\psi^{\varepsilon_1}\phi\psi^{\varepsilon_2}\phi \cdots \psi^{\varepsilon_p}\phi = \frac{1}{2^p} \begin{bmatrix} p_1 & i_1\sqrt{3} & i_2 \\ p_2\sqrt{3} & i_3 & i_4\sqrt{3} \\ p_3 & p_4\sqrt{3} & p_5 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

En particulier, $\psi^{\varepsilon_1}\phi\psi^{\varepsilon_2}\phi \cdots \psi^{\varepsilon_p}\phi$ est distinct de id, ϕ, ψ et ψ^{-1}.

Démonstration. Le résultat est vrai pour $p = 1$, car

$$\psi^{\pm 1}\phi = \begin{bmatrix} 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fixons ensuite $p \geq 1$, et supposons le résultat vrai au rang p. Alors

$$\psi^{\varepsilon_1}\phi\psi^{\varepsilon_2}\phi \cdots \psi^{\varepsilon_p}\phi\psi^{\varepsilon_{p+1}}\phi = \frac{1}{2^{p+1}} \begin{bmatrix} 2i_2 & (\varepsilon_{p+1}p_1 + i_1)\sqrt{3} & -p_1 + 3\varepsilon_{p+1}i_1 \\ 2i_4\sqrt{3} & 2\varepsilon_{p+1}p_2 + i_3 & (-p_2 + \varepsilon_{p+1}i_3)\sqrt{3} \\ 2p_5 & (\varepsilon_{p+1}p_3 + p_4)\sqrt{3} & -p_3 + 3\varepsilon_{p+1}p_4 \end{bmatrix},$$

ce qui clôt la récurrence. $\square$

Posons alors $a = \psi\phi\psi$ et $b = \phi\psi\phi\psi\phi$, et considérons l'ensemble (appelé *alphabet*)

$$\mathscr{A} = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}.$$

Remarquons que les éléments de $\mathscr{A}$ sont deux à deux distincts. Par exemple, $a \neq a^{-1}$, sinon $a^2 = \mathrm{id}_E$, soit $\psi\phi\psi^2\phi\psi = \mathrm{id}$, ou encore $\psi\phi\psi^{-1}\phi = \psi^{-1}$, ce que le lemme 1 exclut.

Soit alors ℓ un entier ≥ 1. Par définition, un *mot réduit de longueur ℓ écrit sur l'alphabet $\mathscr{A}$* est un élément m de $SO(3)$ qui s'écrit $m = u_1 u_2 \dots u_\ell$, où $u_i \in \mathscr{A}$, avec $u_i u_{i+1} \neq \mathrm{id}$ pour $1 \leq i \leq \ell - 1$. On évite donc les simplifications évidentes. On conviendra que l'identité est le mot réduit vide (ou de longueur nulle). Il est facile de vérifier que l'ensemble des mots réduits est un groupe ; c'est-même le plus petit sous-groupe de $SO(3)$ contenant a et b. On le notera $\langle a, b\rangle$.

Théorème 1. Tout mot réduit non vide écrit sur l'alphabet $\mathscr{A}$ est distinct de l'identité.

Démonstration. Commençons par étudier la forme d'un mot réduit non vide. Un tel mot est une succession d'un nombre fini de « blocs », chaque bloc étant constitué d'une seule lettre répétée un certain nombre de fois. Par exemple :

$$m = \underbrace{aaa}_{=a^3}ba\underbrace{b^{-1}b^{-1}}_{=b^{-2}}\underbrace{a^{-1}a^{-1}a^{-1}a^{-1}}_{=a^{-4}}bab.$$

Bien entendu, comme le mot est réduit, un bloc formé de plusieurs copies de la lettre a ne peut être précédé ou suivi que d'un bloc de lettres toutes égales à b ou b^{-1}. Or, si $k \geq 1$, on peut écrire

$$a^k = (\psi\phi\psi)(\psi\phi\psi)\cdots(\psi\phi\psi).$$

Comme $\psi^2 = \psi^{-1}$, le bloc a^k peut s'écrire comme une succession de $3k - (k-1) = 2k+1$ symboles, égaux à ϕ, ψ ou ψ^{-1}, bordée par deux ψ, deux symboles consécutifs n'étant jamais égaux ou inverses. On montre de même que le bloc b^k peut s'écrire comme une succession de $5k - 3(k-1) = 2k+3$ symboles, égaux à ϕ, ψ ou ψ^{-1}, bordée par deux ϕ, avec la même condition sur les symboles consécutifs. La forme des blocs $(a^{-1})^k$ et $(b^{-1})^k$ s'en déduit instantanément. Par suite, tout mot réduit non vide est une succession d'au moins 3 symboles ϕ, ψ et ψ^{-1}, deux symboles consécutifs n'étant jamais égaux ou inverses. On peut mettre un tel mot sous la forme

$$\phi^\varepsilon \psi^{\varepsilon_1}\phi \cdots \psi^{\varepsilon_p}\phi\psi^{\varepsilon'},$$

où $p \geq 1$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$.

On peut alors terminer la preuve. Supposons un instant que

$$\phi^\varepsilon \psi^{\varepsilon_1}\phi \cdots \psi^{\varepsilon_p}\phi\psi^{\varepsilon'} = \mathrm{id}.$$

- Si jamais $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon' = 0$, le lemme 1 fournit une contradiction.

- Supposons donc que $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$. Alors

$$\psi^{\varepsilon'}\phi\psi^{\varepsilon_1}\phi\cdots\psi^{\varepsilon_p}\phi = \psi^{\varepsilon'}\psi^{-\varepsilon'} = \mathrm{id},$$

d'où une nouvelle contradiction avec le lemme 1.

□

Le théorème précédent est la cause directe de l'apparition de phénomènes paradoxaux dans le groupe $SO(3)$. Notons en effet $M(a)$ l'ensemble des mots réduits non vides commençant par la lettre a. Le théorème 1 implique immédiatement que les ensembles $M(a)$, $M(b)$, $M(a^{-1})$ et $M(b^{-1})$ sont deux à deux disjoints. En effet, si, par exemple, on avait

$$au_2\cdots u_k = bv_2\cdots v_\ell,$$

alors

$$v_\ell^{-1}\cdots v_2^{-1}b^{-1}au_2\ldots u_k$$

serait un mot réduit non vide égal à l'identité, ce qui est exclu. On peut donc écrire :

$$\langle a,b\rangle = \{\mathrm{id}\} \sqcup M(a) \sqcup M(b) \sqcup M(a^{-1}) \sqcup M(b^{-1}).$$

Analysons maintenant les mots réduits qui commencent par la lettre a. En dehors de la lettre a, ils sont de la forme am, où m est un mot réduit non vide commençant par a, b ou b^{-1} (a^{-1} est exclu). De là,

$$M(a) = \{a\} \sqcup aM(a) \sqcup aM(b) \sqcup aM(b^{-1}),$$

d'où

$$M(a) \sqcup M(a^{-1}) = \{a\} \sqcup aM(a) \sqcup aM(b) \sqcup aM(b^{-1}) \sqcup M(a^{-1}).$$

On en déduit que [2]

$$M(a) \sqcup M(a^{-1}) \sim \{\mathrm{id}\} \sqcup M(a) \sqcup M(b) \sqcup M(b^{-1}) \sqcup M(a^{-1}) = \langle a,b\rangle.$$

De même,

$$M(b) \sqcup M(b^{-1}) \sim \langle a,b\rangle.$$

On vient donc de montrer l'existence de deux parties disjointes du groupe $\langle a,b\rangle$, toutes deux équidécomposables à ce groupe ! Nous dirons que le groupe $\langle a,b\rangle$ est *paradoxal lorsqu'il agit sur lui-même par translations à gauche.*

2. modulo une légère adaptation de la définition de l'équidécomposabilité. Ici, ce n'est plus le groupe des isométries qui agit sur $\mathbb{R}^3$, mais le groupe $\langle a,b\rangle$ qui agit sur lui-même par translations à gauche.

4 Le paradoxe de la sphère

Nous allons maintenant transporter les phénomènes observés dans le groupe $SO(3)$ sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, la notion clé est celle *d'orbite*, qu'on a déjà rencontré dans le contexte de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints d'une permutation du groupe $\mathfrak{S}_n$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(3)$ et $x \in \mathbb{R}^3$. La *G-orbite de x* est par définition l'ensemble

$$Gx := \{g(x), g \in G\}.$$

En fait, les G-orbites sont les classes de la relation d'équivalence définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ il existe } g \in G \text{ tel que } y = g(x).$$

Par conséquent, *les G-orbites partitionnent* $\mathbb{R}^3$.

Remarque 1. Si G est un sous-groupe de $SO(3)$ et si $x \in S$, alors l'orbite de x est contenue dans S.

Exemple 3. Si G est le groupe des translations, $Gx = \mathbb{R}^3$. Si $G = SO(3)$, Gx est la sphère centrée en 0 et de rayon $\|x\|$.

Fixons à présent les notations en vue de la suite. Dans le paragraphe précédent, nous avons construit un sous-groupe G de $SO(3)$ contenant deux parties disjointes H et K toutes deux équidécomposables à G. Pour transporter H et K sur la sphère unité, on va chercher une partie M de S telle que[3] HM et KM soient disjoints.

De façon générale, si $M \subset S$ et si $h(m) = k(m')$ avec $h \in H$, $k \in K$ et $m, m' \in S$, alors $k^{-1}h(m) = m'$, ce qui implique seulement que m et m' sont dans la même G-orbite. On va remédier à cette difficulté en considérant un ensemble M *contenant exactement un élément de chaque G-orbite de S*. Dès lors, l'égalité $h(m) = k(m')$ implique $m = m'$ et $k^{-1}h(m) = m$. Mais cette dernière égalité n'implique pas à elle seule $h = k$ (et une contradiction), parce que les éléments du groupe G possèdent des points fixes !

Plus précisément, tout élément de G distinct de l'identité possède exactement deux points fixes dans S : les points d'intersection de son axe avec la sphère S. Notons D l'ensemble des points de S qui sont fixés par un tel élément. L'ensemble D est au plus dénombrable, donc $S \setminus D$ est très gros ! Nous allons montrer que $S \setminus D$ possède deux parties disjointes qui lui sont équidécomposables.

3. L'ensemble HM est défini ainsi :

$$HM = \{h(m), h \in H, m \in M\}.$$

Commençons par observer que si $x \in S \setminus D$ et $g \in G$, alors $g(x) \in S \setminus D$. En effet, si $h \in G$ vérifie $hg(x) = g(x)$, alors $g^{-1}hg(x) = x$. Comme $g^{-1}hg \in G$ et $x \notin D$, cela impose $g^{-1}hg = \mathrm{id}$, d'où $h = \mathrm{id}$. Dès lors, la G-orbite de x est contenue tout entière dans $S \setminus D$. Soit alors M une partie de S contenant exactement un élément de chaque G-orbite de $S \setminus D$. Alors on a bien $HM \cap KM = \varnothing$! C'est alors presque terminé : en effet, on avait

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{n} G_i \text{ et } H = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i G_i, \text{ où } g_i \in G,$$

d'où

$$S \setminus D = GM = \bigsqcup_{i=1}^{n} G_i M \text{ et } HM = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i G_i M,$$

ce qui prouve que $HM \sim S \setminus D$. Comme de même $KM \sim S \setminus D$, on a établi le

Théorème 2. L'ensemble $S \setminus D$ est « paradoxal », au sens où il contient deux parties disjointes, toutes deux équidécomposables à $S \setminus D$.

Ce « $\setminus D$ » est un peu gênant, et on aimerait bien montrer que la sphère elle-même est paradoxale ! C'est effectivement le cas, et la preuve repose sur deux arguments, contenus dans les deux lemmes suivants.

Lemme 2. $S \setminus D$ est équidécomposable à S.

Démonstration. Supposons que l'on dispose d'une rotation $r \in SO(3)$ telle que les $r^n(D)$, n décrivant $\mathbb{N}$, soient deux à deux disjoints, et posons $\Delta := \bigsqcup_{n \geq 0} r^n(D)$. Alors, $r(\Delta) = \Delta \setminus D$ d'où

$$S = (S \setminus \Delta) \sqcup \Delta \sim (S \setminus \Delta) \sqcup r(\Delta) = (S \setminus \Delta) \sqcup (\Delta \setminus D) = S \setminus D.$$

Reste à justifier l'existence de r. Pour cela, fixons $a \in S \setminus D$. Pour chaque $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times D$, notons $R_{n,x}$ l'ensemble des rotations r d'axe $\mathbb{R}a$ tels que $r^n(x) \in D$. L'ensemble $R_{n,x}$ est au plus dénombrable. En effet, si nous fixons $y \in D$, il existe au plus une rotation d'axe $\mathbb{R}a$ envoyant x sur y, et cette rotation possède n racines n-ièmes d'axe $\mathbb{R}a$ dans le groupe $SO(3)$. L'ensemble $R = \bigcup_{(n,x) \in \mathbb{N}^* \times D} R_{n,x}$ est donc lui aussi au plus dénombrable. Si r est élément de $SO(3) \setminus R$, alors $D \cap r^n(D) = \varnothing$ pour $n \geq 1$, d'où facilement $r^m(D) \cap r^n(D) = \varnothing$ pour $m \neq n$. $\square$

Lemme 3. Deux parties équidécomposables de $\mathbb{R}^3$ sont simultanément paradoxales.

Démonstration. Soit A et B deux parties équidécomposables de $\mathbb{R}^3$. On peut donc écrire

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \text{ et } B = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i X_i,$$

où $g_i \in SO(3)$. La partie A contient deux parties disjointes A_1 et A_2 qui lui sont équidécomposables. Posons alors

$$B_1 = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i(A_1 \cap X_i) \text{ et } B_2 = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i(A_2 \cap X_i).$$

On a alors

$$B_1 \sim \bigsqcup_{i=1}^{n}(A_1 \cap X_i) = A_1 \sim A \sim B,$$

et de même $B_2 \sim B$. Comme $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, le résultat est acquis. □

Corollaire 1. Les ensembles suivants sont paradoxaux :

(i) la boule unité fermée B de $\mathbb{R}^3$ privée de 0 ;

(ii) la boule unité B elle-même.

Démonstration.

(i) Pour toute partie X de S, on note X^* « l'angle solide » défini par

$$X^* = \{tx, x \in X, 0 < t \leq 1\}.$$

On dispose d'après ce qui précède de deux parties disjointes C et D de S, toutes deux équidécomposables à S. Il est clair que C^* et D^* sont disjointes. De plus, si

$$S = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \text{ et } C = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i X_i,$$

alors

$$B \setminus \{0\} = S^* = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i^* \text{ et } C^* = \bigsqcup_{i=1}^{n}(g_i X_i)^* = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i X_i^*,$$

la dernière égalité étant due à la linéarité des g_i, ce qui prouve que $C^* \sim B \setminus \{0\}$. De même, $D^* \sim B \setminus \{0\}$, le résultat est acquis.

(ii) Soit r une rotation d'axe la droite d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $z = 0$, et d'angle θ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Il est clair que r stabilise D. Posons $\Delta = \{r^n(0), n \geq 0\}$. Alors,

$$B = (B \setminus \Delta) \sqcup \Delta \sim (B \setminus \Delta) \sqcup r(\Delta) = (B \setminus \Delta) \sqcup (\Delta \setminus \{0\}) = B \setminus \{0\}.$$

□

5 Le paradoxe de Banach-Tarski

Théorème 3. Deux boules fermées quelconques[4] de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables.

La preuve utilise de façon cruciale un théorème de type « Cantor-Bernstein » :

Théorème 4 (Banach-Cantor-Bernstein)**.** Soit X et Y deux parties de $\mathbb{R}^3$. On suppose que X est équidécomposable à une partie de Y, et que Y est équidécomposable à une partie de X. Alors $X \sim Y$.

4. De rayons strictement positifs, tout de même !

Démonstration. Commençons par rappeler la preuve du théorème de Cantor-Bernstein. On suppose qu'on dispose de deux injections $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$, et on veut montrer qu'il existe une bijection de X sur Y. Il s'agit essentiellement de montrer l'existence d'une partie Z de X telle que

$$g(Y \setminus f(Z)) = X \setminus Z,$$

autrement dit, d'un point fixe de l'application

$$\Phi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X), Z \mapsto X \setminus g(Y \setminus f(Z)).$$

Cette existence est fournie par le

Lemme 4. Soit $\Phi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ une fonction croissante au sens de l'inclusion. Alors Φ admet un point fixe.

Démonstration. On adapte l'argument utilisé pour montrer qu'une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante admet un point fixe. Dans ce cas, on pose $\mathscr{E} = \sup\{x \in [0,1]/f(x) \geq x\}$ et on montre que $s := \sup \mathscr{E}$ convient.

- Tout d'abord, pour $x \in \mathscr{E}$, on a $x \leq s$, d'où $x \leq f(x) \leq f(s)$ et $s \leq f(s)$ par définition de la borne supérieure. Cela prouve que $s \in \mathscr{E}$.
- Dès lors, on a $f(s) \in \mathscr{E}$ par croissance de f, d'où $f(s) \leq s$ et le résultat.

Posons ici

$$Z = \bigcup_{U \subset \Phi(U)} U.$$

La partie Z est la borne supérieure de l'ensemble (non vide) des parties $U \subset X$ telles que $U \subset \Phi(U)$. Pour toute partie U telle que $U \subset \Phi(U)$, on a $U \subset Z$, d'où $U \subset \Phi(U) \subset \Phi(Z)$, d'où $Z \subset \Phi(Z)$. Mais alors, $\Phi(Z) \subset \Phi(\Phi(Z))$ par croissance de Φ, d'où $\Phi(Z) \subset Z$ par définition de Z. □

Passons à la preuve du théorème 4. On modifie très légèrement l'argument : par hypothèse, on dispose de parties $Y' \subset X$ et $X' \subset Y$ telles que

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{m} X_i,\ X' = \bigsqcup_{i=1}^{m} g_i X_i,\ Y = \bigsqcup_{i=1}^{n} Y_i \text{ et } Y' = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_i X_i,$$

où $g_i, h_i \in \mathrm{Is}^+(3)$. Cela permet de fabriquer « par morceaux » deux injections :

$$f : X \to Y, x \mapsto g_i x \text{ si } x \in X_i$$

et

$$g : Y \to X, y \mapsto h_i y \text{ si } y \in Y_i.$$

Ces deux injections ont une propriété supplémentaire remarquable :

$$f(Z) \sim Z \text{ si } Z \subset X \text{ et } g(Z) \sim Z \text{ si } Z \subset Y.$$

En effet, si $Z \subset X$, on a $Z = \bigsqcup_{i=1}^m (Z \cap X_i)$, d'où

$$f(Z) = \bigsqcup_{i=1}^m g_i(Z \cap X_i) \sim \bigsqcup_{i=1}^m (Z \cap X_i) = Z.$$

Le théorème de Cantor-Bernstein fournit $Z \subset X$ telle que

$$g(Y \setminus f(Z)) = X \setminus Z.$$

Dès lors, on a

$$X = (X \setminus Z) \sqcup Z \sim (Y \setminus f(Z)) \sqcup f(Z) = Y.$$

□

On peut passer à la preuve du théorème 3.

Démonstration. Soit B et B' deux boules fermées, de rayons respectifs r et R, avec $0 < r < R$. Il est évident que B est équidécomposable à une partie de B'. Nous allons montrer que B' est équidécomposable à une partie de B, ce qui donnera le résultat d'après le théorème 4. Commençons par recouvrir B' par un nombre fini $B_1, \ldots, B_n$ de copies de B. Il existe alors des parties $C_1, \ldots, C_n$ de $B_1, \ldots, B_n$ respectivement, *deux à deux disjointes* et recouvrant B'. Or, on a montré plus haut que B était paradoxale. Cela fournit (par itération, cf. le lemme 3) des parties $A_1, \ldots, A_n$ de B, deux à deux disjointes et chacune équidécomposable à B. Fixons enfin $D_1, \ldots, D_n$ des copies de B deux à deux disjointes. Alors,

- B' est équidécomposable à une partie de $D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_n$;
- $D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_n$ est équidécomposable à $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \subset B$.

On en déduit [5] que B' est équidécomposable à une partie de B. □

On obtient alors gratuitement l'auto-amélioration suivante.

Théorème 5. Deux parties bornées et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables.

Démonstration. Soit X une telle partie, et B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que $X \sim B$. Tout d'abord, si B' est une boule fermée contenant X, alors X est équidécomposable à une partie de B', donc de B d'après le théorème 3. Ensuite, si B'' est une boule fermée de rayon > 0 contenue dans X, alors B est équidécomposable à B'' (théorème 3 à nouveau), donc à une partie de X. On conclut grâce au théorème 4. □

5. Si $f : B' \to D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_n$ et $g : D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_n \to B$ sont des injections comme dans la preuve du théorème 4, alors

$$B' \sim gf(B') \subset B.$$

Le fait que la boule unité fermée B soit équidécomposable à la réunion de deux copies disjointes de B en découle immédiatement, et il exclut l'existence d'une application « volume » telle qu'on l'a définie dans l'introduction. Il est remarquable que ce phénomène ne se produise qu'à partir de la dimension 3 : Banach a montré l'existence d'une application « aire », définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}^2$, finiment additive, invariante par les isométries et telle que l'aire du disque unité de $\mathbb{R}^2$ soit égale à π. Cette existence est essentiellement due au fait que le groupe des déplacements plans est « beaucoup plus commutatif » que celui des déplacements de l'espace.

Terminons en mentionnant le résultat spectaculaire de Laczkovich (1990), résolvant en un sens la quadrature du cercle, selon lequel un disque et un carré de même aire sont équidécomposables (le nombre de morceaux utilisés étant majoré par un nombre de l'ordre de 10^{50} !).

Références

[1] S. Banach, « Sur le problème de la mesure », Fundamenta Mathematicæ 4 (1923) p. 7-33 (article disponible en ligne).

[2] S. Banach et A.Tarski, « Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes », Fundamenta Mathematicæ 6 (1924) p. 244-277 (article disponible en ligne).

[3] *Autour du centenaire Lebesgue*, SMF, Panoramas et synthèses, n° 18, 2004. Voir en particulier l'exposé de Pierre de la Harpe : « Mesures finiment additives et paradoxes ».

[4] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985